EL TEOREMA DE LA BISAGRA o DEL FUELLE.
Autor: ÉTIENNE GHIS

Traducción de Lucía Contreras Caballero.

Una regla, un lápiz, cartón, tijeras y pegamento: No hace falta nada más para proveer a los matemáticos placer y problemas bonitos—cuyo estudio se hace a menudo de golpe de vista y de manera inesperada, útil en otras materias.

Construyamos una pirámide de cartón… Para ello, empecemos por recortar un patrón SABCDE en una hoja de cartón como está indicado en la figura 1, luego se dobla a lo largo de las líneas de puntos y al final, se pegan los lados AS y ES.

El resultado es una especie de cucurucho, cuyo vértice es el punto S y cuyo borde es el cuadrilátero ABCD. Este objeto es flexible. Si se sujeta con la mano, el cuadrilátero ABCD puede deformarse y abrirse más o menos: la construcción no es muy rígida. Para completar la pirámide todavía hace falta un cuadrado de cartón y pegarlo al cuadrilátero para formar la base. Después de esta operación la pirámide se ha hecho rígida y sólida. Si se la pone sobre una mesa, no se viene abajo. Si se la coge por la mano y si se trata de deformarla (con suavidad!) no se puede, a menos que se deformen las caras de cartón. Igualmente, un cubo de cartón es rígido como todo el mundo ha constatado muchas veces. ¿Qué pasa para un poliedro más general que tenga millares de caras? La geoda de la Villette, en Paris, es rígida? Esta última cuestión deja entrever que el tema de la rigidez y de la flexibilidad no es quizá solamente teórico!

Un problema de actualidad aún y que asciende a la Antigüedad.

El problema de la rigidez de este tipo de objetos es muy antiguo. Probablemente Euclides los conocía. El gran matemático francés Adrien-Marie Legendre se interesó en ellos a finales del siglo XVIII e de ellos habló a su colega Joseph-Louis Lagrange; quien sugirió a su vez al joven Augustin-Louis Cauchy estudiar esta cuestión en 1813. En este tema obtuvo su primer resultado destacado el baron A-L. Cauchy que se hizo consiguientemente uno de los más grandes matemáticos de su siglo.

Cauchy se interesó en los problemas convexos, es decir en los poliedros que no tienen aristas con huecos. Por ejemplo, la pirámide que hemos construido o un balón de futbol son convexos, mientras que el objeto dibujado a la derecha de la figura 2 no lo es.

El teorema establecido por Cauchy es el siguiente: todo poliedro convexo es rígido. Eso quiere decir que si se construye un poliedro convexo con polígonos indeformables (en metal, por ejemplo) ajustados por bisagras a lo largo de sus aristas, la geometría global del conjunto impide moverse a las junturas. El cucurucho que hemos construido es flexible pero eso no invalida el teorema: le falta una cara y es la última cara la que hace rígida a la pirámide.

Hacer matemáticas es demostrar lo que se afirma! Ahora bien la demostración de Cauchy es soberbia aunque algunos hayan observado después que era incompleta). Desgraciadamente, no es asunto de dar una idea de la demostración en este pequeño artículo, pero me gustaría extraer un "lema", es decir, una etapa de la demostración.

Pongamos sobre el suelo una cadena constituida por un número finito de barras metálicas unidas final con principio, como en la figura 3. Movamos las dos barras de cada uno de los ángulos de esta línea poligonal de manera que disminuya el ángulo correspondiente, entonces los dos extremos de la cadena se acercan. ¿Os parece evidente? Tratad de demostrarlo…

Durante mucho tiempo, muchos matemáticos se han preguntado si los poliedros no convexos eran igualmente rígidos ¿se puede encontrar una prueba de la rigidez que no utilice la hipótesis de la convexidad? A los matemáticos les gusta hacer demostraciones en las que todas las hipótesis son útiles para obtener la conclusión. Ha sido necesario esperar más de 160 años para conocer la respuesta en este caso particular.

En 1977, el matemático canadiense Robert Connelly creó la sorpresa. Construyó un poliedro (bastante complicado) que es flexible, desde luego no convexo para no contrariar a Cauchy. Después, su construcción ha sido algo simplificada, en particular por Klaus Steffen. Yo presento en la figura 4 un patron que permitirá al lector construir el flexidro de Steffen. Recortadlo, pegad a lo largo de las líneas. Las líneas continuas son aristas salientes y las líneas punteadas corresponden a aristas entrantes. Pegad los bordes libres de la manera evidente y obtendréis una especie de “Shadok” y vereis que es efectivamente flexible (un poco…).

Varía el volumen de un poliedro cuando se le deforma?

En ese momento, los matemáticos quedaron encantados por el nuevo objeto. Un modelo metálico fue construido y depositado en la sala de te del instituto de altos estudios científcos, en Bures sur Yvette cerca de Paris y uno se podía distraer haciendo que esa cora realmente no muy bonita y que chirriaba un poco se moviera. La anécdota es que Denis Sullivan tuvo la idea de soplar el humo del cigarrillo en el interior del flexidro de Connelli y que constató que al mover el objeto, no salía nada de humo…Tuvo entonces la intuición de que cuando el flexidro se deforma, su volumen no varía! ¿Era cierta la anécdota? Fuera o no, Connelly y Sullivan conjeturaron que cuando un poliedro se deforma, su volumen es constante. No es difícil comprobar esta propiedad en el ejemplo particular del flexidro de Connelly o aún en el de Steffen (con el coste de cálculos complicados pero desprovistos de interés). Sin embargo, la conjetura en cuestión considera todos los poliedros, incluso los que no han sido nunca construidos en la practica. Han llamado esta cuestión la “conjetura del souflet”: El fuelle en la esquina del fuego injecta aire cuando se le aprieta; de otra forma, su volumen disminuye (y es por otra parte su cometido. Desde luego, un fuelle no corresponde al problema de Connelly y Sullivan: es de cuero y sus caras se deforman constantemente, contrariamente a nuestros poliedros de caras rígidas.

EL TEOREMA DE LA BISAGRA o DEL FUELLE.
Autor: ÉTIENNE GHIS

En 1997, Connelly y otros dos matemáticos, I. Sabitov y A. Walz lograron finalmente probar esta conjetura. Su demostración es grandiosa y ilustra una vez más las interacciones entre todas las partes de las matemáticas. En este problema eminentemente geométrico, los autores han utilizado métodos muy finos de álgebra abstracta moderna. No es por tanto, una demostración que *Cauchy* "hubiera podido encontrar": las técnicas matemáticas de la época eran insuficientes. Quisiera recordar una fórmula que se enseñaba antes en la escuela secundaria. Si las longitudes de los lados de un triángulo son *a, b y c*, se puede calcular fácilmente la superficie del triángulo. Para eso, se calcula primero el semiperímetro p=(a+b+c)/2 y a continuación se obtiene la superficie extrayendo la raiz cuadrada de *p(p-a)(p-b)(p-c).* Esta hermosa fórmula lleva el nombre del matemático griego Heron y nos llega de la noche de los tiempos. ¿Se puede calcular de manera análoga el volumen de un poliedro si se conocen las longitudes de sus aristas? Nuestros tres matemáticos contempráneos han demostrado que si.

Parten de un poliedro construido a partir de un patron formado por un cierto número de triángulos y llaman llaman *l,m,n,* etc, las longitudes de los lados de los triángulos (posiblemente muy numerosos). Encuentran entonces que el volumen del poliedro debe satisfacer una ecuación de grado n donde n depende del patron utilizado y los coeficientes de la ecuación dependen explícitamente de las longitudes de los lados. Dicho de otra forma, si están determinados el patron y las longitudes de los lados, la ecuación está determinada. Si el lector se acuerda de que una ecuación, en general, tiene una solución cuando es de primer grado, dos soluciones cuando es de segundo grado, podrá adivinar que una ecuación de grado n tiene nada menos que n soluciones. Por tanto, conociendo el patron y las longitudes, no se conoce necesariamente el volumen, pero por lo menos se sabe que este volumen sólo puede tomar un número finito de valores. Cuando el flexidro se deforma, su volumen no puede variar continuamente (si no, el volumen tomaría una infinidad de valores sucesivos); este volumen está bloqueado y la conjetura del “souflet” queda establecida…

Sí, el problema de la bisagra es digno de interés!

¿Es útil, interesante, este problema? ¿Qué es un problema matemático interesante? Problema difícil en el que los matemáticos piensan desde hace tiempo, desde luego. He aquí algunos átomos de respuesta, algunos índices de “calidad”. La antigüedad es un primer criterio: las matemáticas son deslumbrables por la tradición, por problemas enunciados desde hace mucho tiempo sobre los cuales matemáticos de muchas generaciones han cavilado. Un buen problema debe enunciarse sencillamente, su solución debe conducir a desarrollos sorprendentes, poniendo en relación si es posible, dominios muy diferentes. Desde estos puntos de vista el problema de la rigidez que acabamos de abordar es interesante.

El asunto de saber si un buen problema debe tener aplicaciones útiles en la práctica es más sutil. Los matemátcos replican a ello de manera variable. Indiscutiblemente, las cuestiones “prácticas” surgidas, por ejemplo de la física sirven muy a menudo de motivación para las matemáticas. A veces, se trata de resolver un problema muy concreto, pero la relación es a menudo más relajada: el matemático usa entonces, el problema concreto como una fuente de inspiración y la resolución efectiva del problema inicial no es la verdadera motivación. El problema de la rigidez pertenece a esta última categoría. El origen geométrico y físico es bastante claro: la estabilidad y la rigidez de las estructuras por ejemplo metálicas. Por lo pronto, los ejemplos de Connelly no son de ninguna utilidad para los ingenieros. Sin embargo, parece claro que este género no fallará, en un futuro indeterminado, a permitir una mejor comprensión global de la rigidez de las vastas estructuras constituidas por un gran número de elementos individuales (macromoléculas, edificios, etc. Se trata de investigaciones teóricas y “desinteresadas” pero que tienen bastantes probabilidades de revelarse útiles algún día…

Étienne Ghys.
École Normale Supérieure de Lyon.
CNRS-UMR 5669.

Ver las referencias en el original.